La houle.

On envisage des mouvements ondulatoires de la surface de l'eau en $\exp \jmath(\omega\, t - k\, x)$ d'amplitude a et donc de vitesse caractéristique $v = a\,\omega$

Question 1 :
Montrer que l'accélération convective est négligeable devant l'accélération temporelle si v est petite devant la vitesse de phase de l'onde ou encore si a est petite devant la longueur d'onde. On se place dans le cadre de cette approximation dans toute la suite de l'exercice.

En ordre de grandeur, une dérivation par rapport au temps (respectivement à l'espace) revient à diviser par un temps (resp. une longueur) caractéristique, soit pour un phénomène ondulatoire par la période T (resp. la longueur d'onde λ). Donc la condition

$$\left\| (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\, \overrightarrow{v} \right\| \ll \left\| \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} \right\|$$

devient

$$v \frac{v}{\lambda} \ll \frac{v}{T} \qquad \text{soit} \qquad v \ll \frac{\lambda}{T} = \frac{v_\varphi\, T}{T} = v_\varphi$$

Puisque la vitesse, dérivée temporelle de la position d'un mouvement d'amplitude a et de pulsation ω, a pour ordre de grandeur $a\,\omega$ ou, au facteur $2\,\pi$ près, a/T, la condition se réécrit

$$\frac{a}{T} \ll \frac{\lambda}{T} \qquad \text{soit} \qquad a \ll \lambda$$

Question 2 :
Que devient $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$ en notation complexe ? En déduire que le mouvement est irrotationnel.

En régime sinusoïdal de pulsation ω, l'accélération temporelle est, en notation complexe,

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \jmath\, \omega\, \overrightarrow{v}$$

Reportons dans l'équation d'Euler, en y négligeant $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\, \overrightarrow{v}$

$$\jmath\, \omega\, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\mu}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = -\, \overrightarrow{\mathrm{grad}} \left(g\, z + \frac{p}{\mu} \right)$$

où l'on a tenu compte que μ et constant puisqu'il s'agit d'un liquide, donc d'un fluide incompressible. Prenons-en le rotationnel, en se souvenant que le rotationnel d'un gradient est nul

$$\jmath\, \omega\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

Question 3 :
On considère que la houle provoque un écoulement irrotationnel de fluide incompressible et non-visqueux dont le potentiel des vitesses est : $\Phi = f(z)\, \cos(\omega\, t - k\, x)$. Quelle équation différentielle est vérifiée par $f(z)$?

L'écoulement est irrotationnel donc le champ de vitesses dérive d'un potentiel ; on note $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Phi$.

Le fluide est incompressible, donc $\mathrm{div}\, \overrightarrow{v} = 0$ soit $\mathrm{div} \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Phi \right) = \Delta \Phi = 0$, d'où

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = f''(z)\, \cos(\omega\, t - k\, x) + 0 - k^2\, f(z)\, \cos(\omega\, t - k\, x) = 0$$

d'où $f''(z) = k^2\, f(z)$

Question 4 :
Justifier la condition aux limites $lim_{z\to-\infty} f(z) = 0$ ***et en déduire, à une constante multiplicative près, la fonction*** $f(z)$***.***

La solution générale de l'équation précédente peut s'écrire $A\ \exp(k\,z)+B\exp(-k\,z)$. Le second terme diverge quand on s'éloigne indéfiniment vers le bas (La mer a certes un fond mais sa profondeur, en haute mer, est grande devant la longueur d'onde, distance entre les crêtes de deux vagues successives, et égale, au facteur $2\,\pi$ près, à $1/k$, donc pour ce problème «la mer est infinie. . .et mes rêves sont fous» [1]). On peut donc écrire, en changeant légèrement la notation, $f(z) = \Phi_0\ \exp(kz)$

Question 5 :
Avec une approximation à préciser, décrire le mouvement d'une particule de position moyenne $M^*(x^*, y^*, z^*)$***.***

On a donc $\Phi = \Phi_0\ \exp(k\,z)\ \cos(\omega\,t - k\,x)$ donc les composantes de la vitesses sont

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = k\,\Phi_0\ \exp(k\,z)\ \sin(\omega\,t - k\,x)$$

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = k\,\Phi_0\ \exp(k\,z)\ \cos(\omega\,t - k\,x)$$

On est tenté d'intégrer la vitesse pour trouver le mouvement, mais attention ! On n'a pas quelque chose comme $dx/dt = F(t)$ mais $dx/dt = F(t, x, z)$ qu'on ne sait pas résoudre. Si l'amplitude du mouvement est $a \ll \lambda$, alors $k\,x$ varie au plus de $k\,a = 2\,\pi\,\frac{a}{\lambda} \ll 1$ et l'on peut donc considérer $f(z) \approx f(z^*)$ et $\cos(\omega\,t - k\,x) \approx \cos(\omega\,t - k\,x^*)$ et, là, on peut intégrer, d'où, en assimilant les constantes d'intégrations aux positions moyennes,

$$x(t) = x^* - \frac{k}{\omega}\Phi_0\ \exp(k\,z)\ \cos(\omega\,t - k\,x)$$

$$y(t) = y^*$$

$$z(t) = z^* + \frac{k}{\omega}\Phi_0\ \exp(k\,z)\ \sin(\omega\,t - k\,x)$$

où l'on reconnaît un mouvement circulaire dont le rayon $k\,\Phi_0\ \exp(k\,z)/\omega$ décroît exponentiellement avec la profondeur.

Question 6 :
Soit $\zeta(x, t)$ ***l'équation de la surface de l'eau, l'origine de*** Oz ***étant la surface au repos. Justifier l'approximation*** $\frac{\partial \Phi}{\partial z} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t}$***.***

Tout bêtement $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ est la vitesse verticale de la surface de la mer qui se confond avec la vitesse de la quasi-particule d'eau en surface, soit $v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$

Question 7 :
Ecrire l'équation d'Euler en supposant la houle d'assez faible amplitude pour négliger l'accélération convective et en déduire que $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\mu} + g\,z = 0$***. Que devient cette relation en surface ?***

On a

$$\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\mu}\ \overrightarrow{\text{grad}}\,p$$

$$\frac{\partial\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi}{\partial t} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\left(g\,z + \frac{p}{\mu}\right)$$

1. poème de Jean de la Ville de Mirmont (1886–1914) mis en musique par Gabriel Fauré (1845–1924) dans son cycle de chants "L'horizon chimérique" opus 118

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\,z + \frac{p}{\mu}\right) = 0$$

L'expression dont le gradient est nul ne dépend ni de x, ni de y, ni de z, elle pourrait dépendre du temps, mais il ne faut pas s'en soucier : c'est un faux problème. En effet, on peut, sans changer le champ de vitesses (qui, seul, a une réalité physique) ajouter au potentiel n'importe quelle fonction du temps ; on choisira celle-ci de façon que la grandeur considérée soit constante et même nulle. Donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\,z + \frac{p}{\mu} = 0$$

Passons en surface $z = \zeta$ où règne la pression atmosphérique uniforme notée p_0

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\,\zeta + \frac{p_0}{\mu} = 0$$

Question 8 :
Déduire des deux conclusions précédentes une équation aux dérivées partielles vérifiée par Φ et en déduire la relation de dispersion. Commenter le résultat.

Dérivons par rapport au temps la relation précédente et reportons-y l'avant-dernière

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

reportons-y l'expression de Φ

$$-\omega^2\,\Phi_0\,\exp(k\,z)\,\cos(\omega\,t - k\,x) + k\,\Phi_0\,\exp(k\,z)\,\cos(\omega\,t - k\,x) = 0$$

soit encore, après simplifications, $\omega^2 = g\,k$. Puisque ω n'est pas proportionnel à k, le milieu (la surface de la mer) est dispersif. On peut exprimer la vitesse de phase en fonction de ω (donc de la fréquence ou de la période) ou de k (donc du nombre ou de la longueur d'onde) ; par exemple

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k}\sqrt{g\,k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\,\lambda}{2\,\pi}}$$

A titre d'exemple, une houle dont les vagues seraient distantes de cinq mètres se propagerait à la vitesse de $2,8$ mètres par seconde soit quasiment dix kilomètres à l'heure. Il ne nous reste qu'à aller à la plage et à le vérifier, en se dévouant ainsi pour la science.

Question 9 :
Reprendre le problème dans un bassin de profondeur finie H

La première modification porte sur la question 4. La condition aux limites est que la vitesse du fluide est tangentielle au contact du fond du bassin. On a donc au fond ($z = 0$) $v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ d'où $f'(0) = 0$.

En écrivant cette fois la solution générale de l'équation différentielle : $A\,\text{ch}(k\,z) + B\,\text{sh}(k\,z)$, on en déduit $B = 0$. On notera

$$\Phi = \Phi_0\,ch(kz)\,\cos(\omega\,t - kz)$$

Ensuite, en question 8, la condition en surface

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

devient

$$-\Phi_0\,\omega^2\ \mathrm{ch}(k\,z)\ \cos(\omega\,t-kz)+g\,k\,\phi_0\ \mathrm{sh}(k\,z)\ \cos(\omega\,t-kz)=0 \qquad \text{à la surface}$$

soit

$$\omega^2=g\,k\ \mathrm{th}(k\,z) \qquad \text{à la surface}$$

Or la surface est en $z=H+\zeta(x,t)\approx H$ d'où

$$\omega^2=g\,k\ \mathrm{th}(k\,H)$$

Pour H très grand devant $\lambda=2\,\pi/k$, $\mathrm{th}(k\,H)\sim 1$ et l'on retrouve le résultat d'une mer infiniment profonde ; pour H très petit devant $\lambda=2\,\pi/k$, $\mathrm{th}(k\,H)\sim k\,H$ et l'on trouve :

$$\omega^2=g\,H\,k^2$$

d'où

$$v_\phi=\frac{\omega}{k}=\sqrt{g\,H}$$

N'oublions pas de remarquer qu'en eau peu profonde, la vitesse de phase ne dépend pas de la fréquence et que le milieu n'est pas dispersif, au contraire d'une mer profonde.

Question 10 :

Montrer que les raisonnements en questions 6 et 8 ont été bien hâtifs et relèvent de l'entourloupe ; montrer néanmoins que leurs résultats sont une bonne approximation dans le cadre des approximations du problème.

En question 8, on dit que, puisqu'en surface

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+g\,\zeta+\frac{p_0}{\mu}=0$$

en dérivant, l'on a

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\,\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0$$

et bien non ! La première relation signifie qu'à la surface $(z=\zeta(x,t))$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,\zeta(x,t),t)+g\,\zeta(x,t)+\frac{p_0}{\mu}=0$$

L'argument z de $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ a été remplacé par $\zeta(x,t)$ et les règles de dérivation des fonctions composées conduisent à

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial t}\,\frac{\partial\zeta}{\partial t}+g\,\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0$$

Au vu des expressions de Φ, vis-à-vis des dérivations par rapport à x ou z, on a une même distance caractéristique en $1/k$ ou λ et le temps caractéristique est la période T. Quant à ζ, on a noté a l'ordre de grandeur de l'amplitude du mouvement. Le premier terme de l'équation ci-dessus a donc pour ordre $\frac{\Phi}{T^2}$ et le second $\frac{\Phi}{\lambda T}\,\frac{a}{T}$; on peut donc négliger le second devant le premier si $a\ll\lambda$ ce qui est l'hypothèse initiale de travail.

L'affirmation de la question 6 est bien légère car une particule en surface n'y reste pas et donc le mouvement de la surface n'est pas le même que celui de la particule. Imaginons une particule qui soit en surface à l'instant t ; ses coordonnées notées $x_P(t)$ et $z_P(t)$ vérifient donc

$$z_P(t)=\zeta(x_P(t),t)$$

A un instant τ appartenant à un intervalle de temps de part et d'autre de l'instant t la particule est sous la surface, notons

$$z_P(\tau) = \zeta(x_P(\tau), \tau) + \Delta z(\tau)$$

$$\text{avec} \qquad \Delta z(\tau) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \Delta z(t) = 0$$

Dérivons par rapport au temps avec les mêmes complications que plus haut

$$\frac{\mathrm{d}z_P}{\mathrm{d}t}(\tau) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x_P(\tau), \tau) + \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x_P(\tau), \tau)\,\frac{\mathrm{d}x_P}{\mathrm{d}t}(\tau) + \frac{\mathrm{d}\Delta z}{\mathrm{d}t}(\tau)$$

En particulier en $\tau = t$ où Δz est manifestement maximal donc de dérivée nulle

$$\frac{\mathrm{d}z_P}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x_P(t), t) + \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x_P(t), t)\,\frac{\mathrm{d}x_P}{\mathrm{d}t}(t)$$

A un instant donné, on peut confondre vitesse lagrangienne et eulérienne (voir le cours) donc $\frac{\mathrm{d}x_P}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}z_P}{\mathrm{d}t}$ avec $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, soit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Mais pour les mêmes raisons que ci-dessus, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ a pour ordre de grandeur $\frac{\Phi}{\lambda}$ et le terme supplémentaire $\frac{\partial \zeta}{\partial x}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ a pour ordre de grandeur $\frac{a}{\lambda}\,\frac{\Phi}{\lambda}$ et est lui aussi négligeable toujours parce que $a \ll \lambda$

Subtil, tout cela, non ?